摘要

本文是GDC 2008同题演讲,它简要介绍了球谐(SH),并讨论了将其用于交互式图形的几种方法以及可能出现的问题,尤其是以下问题:如何使用SH高效评估照明模型,“振铃”是什么以及你能做什么,有效评估SH乘积以及它们在哪里使用.有关最新版本,请访问以下网站:<http://www.ppsloan.org/publications>

介绍

谐波函数[2]是拉普拉斯方程的解,已广泛用于各个领域.当局限于球时,球谐就是解[5].它们已被用来解决物理学中的潜在问题,例如热方程(模拟温度随时间的变化[25])以及重力和电场[9].它们也已用于量子化学和物理学中,以模拟原子中的电子构型并模拟量子角动量[16][51].与图形更接近,它们已用于对散射现象进行建模[7][17].在计算机图形学中,已被广泛使用,早期用于建模体积散射效应[18],无全局阴影的微面BRDF的环境反射[6],非漫射离线光传输模拟[40],BRDF表示[53],图像重新照明[28],具有可控照明的基于图像的渲染[54][55]以及对光源发射进行建模[8].最近的例子包括在大气散射[50]和计算机视觉[3]中的更多工作.

本文的重点是与交互式渲染相关的技术.在游戏中广泛使用的第一篇论文涉及使用球谐函数有效地表示辐照度环境贴图,从而允许在远处照明下对漫反射对象进行交互式渲染[35].扩展以处理具有相同约束条件的有限类别的BRDF[36].预计算辐射转移(PRT)[41][20][24]对静态物体/场景对照明环境的响应进行建模,通常使用SH表示,包括复杂的全局照明效果,例如柔和阴影和具有漫反射和简单光泽材质的相互反射.它被扩展为处理更通用的BRDF模型[20] [23] [42],并结合了次表面散射[42],通过机器学习的压缩技术[42]显着提高了渲染效率,并使用各种技术对像表面细节一样的纹理[43] [44] [45]“局部”模型进行建模.SH已用于对来自远距离照明环境的单个散射进行建模[49].其他用途已用于使用梯度来提升远距离照明的假设[1],几种技术可以解决动态对象[56] [37],包括对相互反射的支持[46] [33],以可视化方式表示使用通用BRDF模型[12]对对象进行阴影建模,并使用比例运算符对可变形对象的阴影进行建模[52],作为折射的参数化[11],以及解决法线贴图的详细程度问题的技术[15].

更多实用的论文包括PRT的实现细节[13],如何将这些技术集成到引擎中[30],如何将SH +梯度用于辐照体积[31][32],围绕投影的实际问题以及如何有效地量化SH系数[21],另一篇论文将解析天窗模型[34]投影到SH中,并使用全局多项式拟合来评估SH光探针作为模型参数的函数[14]。使用SH在半球上也有专门的文献[22].

实时图形中的许多用途都是表示球谐函数（可见性，照明和反射率）的便捷方式。同时，还有许多其他基本函数可以使用，小波[39]，立方体图上的小波[27] ，球面径向基函数[9]和其他[26]，球谐函数具有一些很好的属性，将在本文档中进行描述。需要强调的是，在某些情况下，这些其他基函数更合适。

尽管球谐函数看起来有些令人生畏，但它们实际上很简单，它们是单位圆上傅立叶基础上的球模，并且易于进行数值计算。该系列（将始终在视频游戏中完成），以最大程度地减少可能出现的“振铃”伪影。本文将介绍如何使用球谐函数有效地评估和表示光源，如何将常规光源从SH表示中拉出来， 描述“振铃”和缓解技术以最大程度地减少其影响，并使用球谐函数遍历函数的乘积，描述它们在何处有用以及值得优化的特殊情况.

**背景**

**定义** 球谐函数在球面上的定义了一组正交基.参数化表示为

其中是单位球上的任意一点.基函数定义为

其中是相关勒让德多项式,是归一化常数

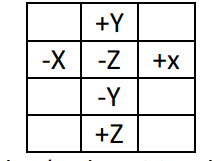
上面的定义是针对复杂形式(非图形文献中最常用的形式),通过转换给出基函数

索引代表“带”.每个带等效于阶的多项式(因此零阶只是一个常数函数,1阶是线性),并且在给定的带中有个函数.球谐坐标在计算积分时很方便,也可以使用多项式表示,就像在评估它们时通常所做的那样(有关详细信息,请参见附录A1评估SH基函数的递归规则和附录A2 SH基多项式形式.)阶SH使用所有阶的基函数展开.

球谐函数可以通过两种方式可视化:一种标准方法是通过按函数的绝对值径向缩放每个点对单位球面进行变形并根据符号对其进行着色(红色表示正,蓝色表示负).上面是使用此技术的前三个频段的图像.

中心列( = 0)中的函数称为区域谐波（ZH），稍后将进行讨论，这些函数围绕z轴具有旋转对称性,并且零(函数为零的位置)是球面上平行于XY平面的轮廓.的函数被称为扇形谐波,而零则定义了像苹果片一样的区域.

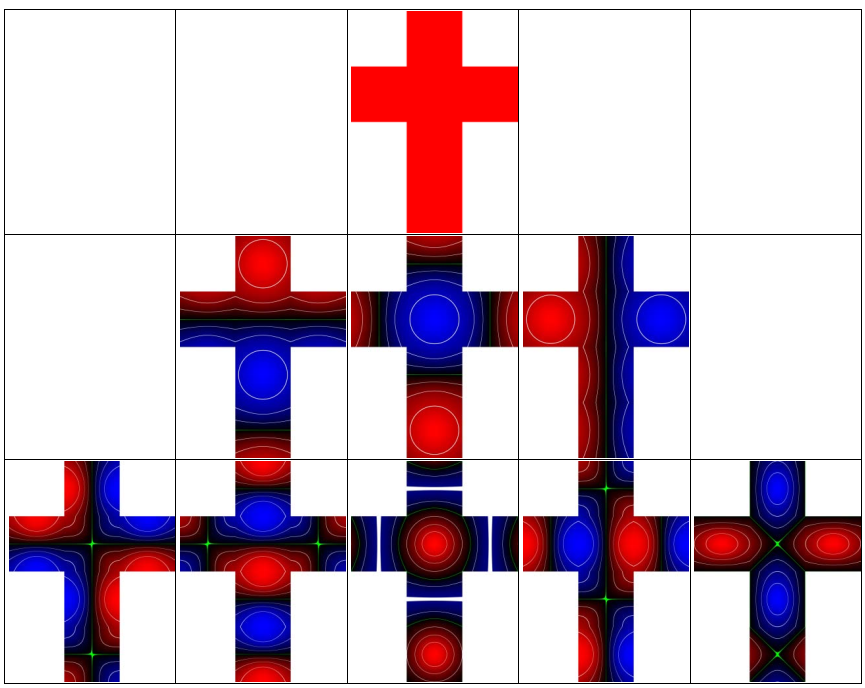
另一种可视化方法是使用展开到平面上的立方体贴图的参数化绘制它们.立方体贴图的展开如下:



在这里,大小用颜色(红色正,蓝色负,零绿色)编码,并且等强度线轮廓被均匀放置(白线),以使函数的梯度更直观(当它们聚集在一起时,函数变化速度更快).

**投影和重建** 由于SH基是正交的,因此定义在上的任意标量函数的最小二乘投影可以通过简单地对想要投影函数作积分就能获得.

这些系数可以用来重建函数的近似



随着的数量增加,精度越来越高.本文着重于的低频近似,对于更高频率的表示,其他基往往会做得更好.投影到阶会生成个系数,通过以下方式对投影系数和基函数使用单个索引会比较方便

其中.该公式使得在方向上计算近似函数很容易,仅仅在个系数向量和基向量函数作点乘运算.第一个系数(或)表示函数在球面上的平均值,有时也被称为DC项.

**基础属性** SH的一个重要属性是投影如何与旋转交互.给定一个函数,其代表函数被旋转矩阵旋转,因此的投影等于先旋转再投影.这种旋转不变性与傅立叶变换中的平移不变性相似.这意味着,例如,光照在旋转下将保持稳定,因此不会出现任何混叠伪影或光源“摆动”.下图是用定向光源照明的球体的图像,最上面一行使用SH,最下面一行使用Valve的Ambient Cube基[26].第一列是最佳情况,第二列接近最坏情况.使用SH图像是不变的.在附录A9 Ambient Cube基中将更详细地讨论此基函数.在此范围内定义的任何其他基都将在某种程度上发生这种情况.

由于SH基的正交性,任意两个球谐函数和,它们乘积的积分简单地等于系数向量的点积:.

**卷积** 给定具有圆对称性的内核函数,可以生成一个新的SH函数,该函数是将内核与原始函数卷积的结果.必须具有圆对称性,卷积的结果也必须表示在球体上,而不是旋转组上.可以使用以下公式直接在频域中进行卷积:

这相当于简单地将的每个波段按对应的项进行缩放.

**旋转** 如前所述,SH在旋转下闭集.SH旋转矩阵采用块结构,其中每个波段在旋转上都是独立的,并且具有密集的子矩阵.有几种计算这些旋转矩阵的方法,对于非常小的阶(二次或更少),象征性地执行是最有效的,但是对于更高阶,将旋转矩阵分解为zyz Euler角似乎更有效[19].

**区域谐波** 具有绕轴旋转对称性的函数的球谐投影称为Zonal Harmonics(ZH).如果将它们定向为轴Z,则函数的零将形成恒定纬度的线,并且这些函数仅取决于.该方向上的系数向量每个频带只有一个非零,因此阶函数具有个系数,而不是个系数.区域谐波已用于近似传输[44],并且是散射理论中相函数的常见表示[7][17],在建模光源时,将广泛使用它们.区域谐波的旋转比一般的SH简单,它可以用有效的对角矩阵完成,只需要在新方向上评估SH基函数.给定一个函数的ZH系数(仅来自SH投影的个项),可以使用以下公式将其旋转到新的方向:

因此,产生的SH系数为:

**SH乘积** 使用投影到SH的n阶SH表示的两个函数和的乘积的第k个系数具有以下形式:

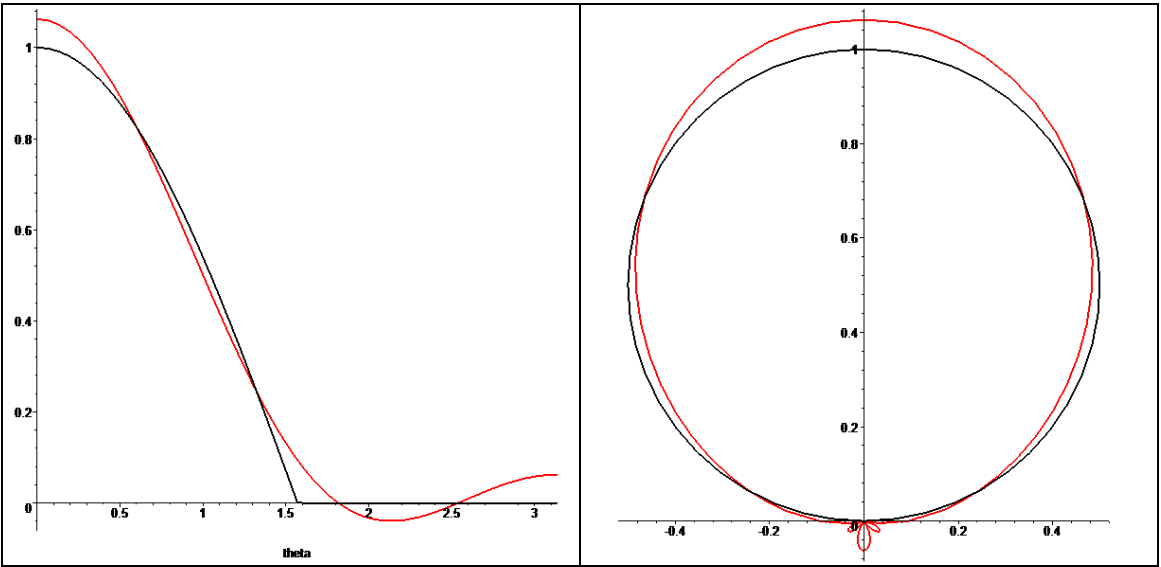
其中是三乘积张量:

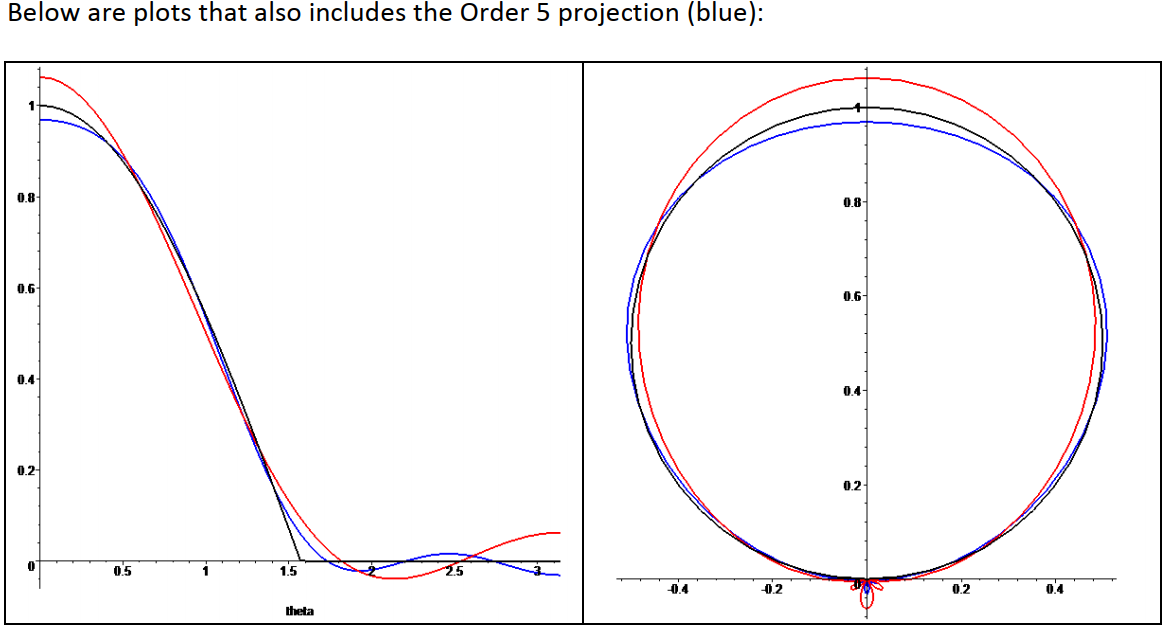
3阶稀疏对称张量.由于SH是多项式,因此项式乘积将具有最大阶数,这意味着它将具有阶的非零系数.随着要乘的函数数量的增加，这变得很笨拙，因此通常会提早截断乘积[56] [37].作为的函数的非零系数的数量非常大[47][37],因此生成有效代码时必须小心.需要指出的一种特殊情况是,如果函数是固定的(即,远处的照明),则可以计算出“乘积矩阵”,这将大大降低成本.该矩阵是对称的,并使用以下公式构建:

在这种情况下,计算函数乘积可简化为矩阵向量乘积.

**辐照度环境贴图**

通过将具有固定余弦函数的光探针卷积,可以创建辐照环境图:应通过除以𝜋来归一化以显示辐射度.这种卷积可以使用SH [35]有效地完成,并且足够精确,也可以直接从SH有效地进行渲染.3阶SH可以很好地逼近该内核,但是如果要使用HDR光源,则您可能需要考虑使用5阶(4阶ZH系数为零,以便可以跳过频带).阶段余弦核和3阶SH近似值,红色曲线是SH近似值,左图是作为theta函数的图,右图是由函数的绝对值缩放的极坐标图:





3阶SH近似值在theta=(北极)时比估计值高1/16,并且在南极处具有虚假瓣,幅值为1/16。 一个定向光源,当法线指向其上的法线点将反射指向相反方向的值1（应反射0）时，该值将反射17。该5阶近似值具有一个负波瓣,它将反射-1，而 可以反射31并指向法线的定向光。 尽管这些近似值是准确的,但是近似值可能会导致误差,尤其是在使用非常明亮的光源的情况下.

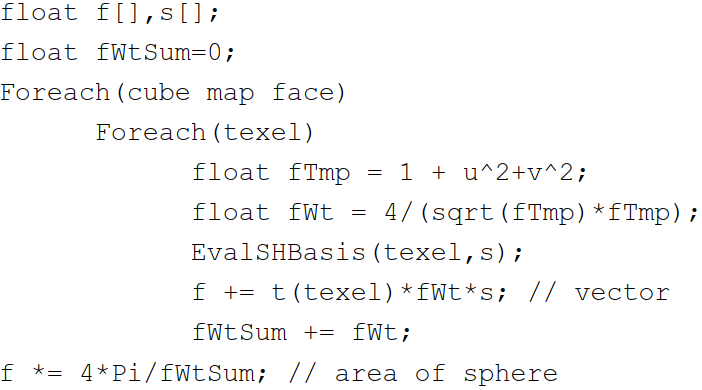
附录A10辐照度环境贴图的着色器/CPU代码包含用于有效评估辐照度环境贴图的着色器和CPU代码.

**光照模型**

SH中有多种表示照明的方法.最简单的方法是仅从立方体贴图进行投影,但是也有一些分析模型,这些模型的评估成本很低,而且可能对艺术家曝光很有用.最近的一篇论文[14]很好地将实际的天窗模型[34]投影到了SH中,并且在模型的参数空间上拟合了SH系数的全局多项式.

**从Cube Map投影**

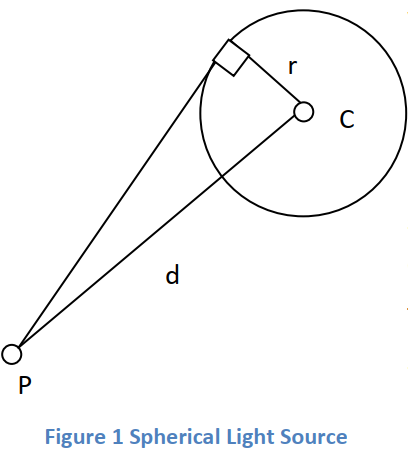
要从Cube map进行投影,你只需要将SH基本函数与Cube map集成在一起.这可以通过在每个纹理像素中心的方向上评估SH基函数,并通过该纹理像素的微分立体角对其加权并对结果进行归一化,以数值方式完成.用伪代码:



在上面的代码中,u和v表示给定面上的两个坐标,它们不是+/-1(在+X面上,它将是y/z).t(texel)是纹理颜色.EvalSHBasis需要归一化输入坐标(在立方面上),并简单地评估该方向上的SH基函数.可以省略最后一次归一化(相反,你可以只除以样本数),因为微分立体角的归一化总和应为4 \* Pi,但它往往会略有偏离(特别是在使用低分辨率立方体贴图时).

下图是将HDR光探头重建为1到6级球谐的图像.最后的是原始图像.

**解析模型**

 定向光的计算很简单,你只需在给定方向上评估SH基函数并适当缩放即可(请参见归一化部分.)可以使用区域谐波有效地评估球形光源.下图显示了一个示例场景,我们要计算接收点P处的入射辐射度,即球面函数.给定球形光源中心为C,半径为r,到达点P距离d个单位的辐射量是多少？光源对着的半角的正弦为r/d，因此您只需要计算一个光源即可对着球体的适当部分。可以根据该角度以封闭形式计算ZH系数其中是对角.有关6阶表达式的信息,请参见附录A3球形光源的ZH系数.

球面技术也可以用来模拟具有恒定发光的圆锥体(将其视为无限远处的圆盘).可以对较软的圆锥进行建模,使其在可见部分上具有平滑的衰减–有关公式,请参见附录A4圆锥平滑的ZH系数.

列是针对4和6阶的,最上面的行是圆锥的投影,最下面的行是具有平滑下降的圆锥.角度为90度(绿色),45度(红色),30度(蓝色),12.5度（黑色）.虚线表示实际功能(圆锥体略有位移,因此它们不重叠),实线是SH近似值.通常,软锥体的表现更好.如何解决投影中出现的伪影是下文“振铃”部分的主题.

标准化

如果使用[0,1]照明,则可以方便地将辐射矢量归一化,以使法线直接指向光源的无阴影接收器的反射辐射为1.0.从数学上来说,你想计算一个比例因子,当与照明矢量相乘时,且与代表不受遮挡的余弦波瓣(归一化的余弦向SH的投影)的矢量积分时,将得到单位反射辐射率:

计算归一化因子时,仅应使用将用于渲染的带.将与对齐可得出一个简单的解析公式;这是前6个带的系数:

对于解析光源,你可以使用解析归一化项,对于角度为的圆锥形光,应为:

但是,生成的光将不会反映单位辐射,因为将不会考虑固定余弦函数和光源的投影误差.对于定向光源,归一化系数为(假设不高于4阶照明,对于5阶或6阶,归一化因子为),对于“环境”灯,归一化系数为.

从SH提取常规光源

给定SH照明向量,可以将其近似为单个方向光源和环境光源.这已在不支持顶点着色器的硬件上使用.在数学上,我们要计算定向光的强度()和环境光源的强度()以使任何表面法线()的反射辐射的平方误差最小.假设光源的方向固定(),我们要最小化的误差函数为:

其中是归一化截断余弦.如果照明用SH表示,则有一个简单的解决方案.新照明环境代表的辐照环境贴图应与输入辐照环境贴图尽可能接近–最小化这两个环境贴图的平方误差等同于最小化所有法线上的反射辐射:

是方向上的归一化SH定向光,而是归一化后的SH恒定光(仅取决于DC.)最佳值和为:

通过与归一化截断余弦核进行卷积,以上所有照明矢量都被转换为辐照环境图.上面的点积忽略DC项,而是照明环境的DC项.上面假设一个已知方向,一个好的候选方向是通过归一化向量形成的“最佳线性”方向[44],这是照明环境的线性系数.

抽取多个光源

也可以从SH光探头中提取多个光.可以这样做是为了消除振铃(解析光不会具有负波瓣),建模光泽反射(仅来自以这种方式拉出的光源)或使用少量阴影z​​buffer(将这两种光都拉出)当光探头由单个光源控制时,最佳线性方向效果很好,如果不是这种情况,则应该以某种方式优化光的方向和强度.要做的一件事是爬上山以找到功能的局部最大值.给定SH的平滑度,对于给定的阶数,存在一个有限的距离,该距离可以确保使用梯度上升方法从一个明显的峰到该点的任何点都到达该点.可以生成一个点集，其属性是球体上距其Voronoi单元中心最远的点小于此距离。如果从这些点中的每一个开始搜索，则应该找到所有点的局部最大值。这些距离可以通过查看增量函数的投影并计算峰与零之间的角距离来找到。使用这个半径的三分之二的保守估计，对于前6个订单，每个订单所需的点数为{1,3,6,10,15,22}。

震荡

振铃,也称为吉布斯现象,是信号处理中的常见问题.当将具有不连续性的信号投影到有限傅立叶基(只能表示连续函数)时,在不连续性周围会发生过冲和下冲.如果投影被截断,没有中断的功能可能会表现出类似的行为.我们在查看照明模型时以及在表示辐照度环境贴图(已夹紧的余弦函数的投影)时已经看到了这些问题.在曲面设计中也发生了类似的问题,当尝试满足一组几何约束时,可能会发生不必要的振荡.这些问题有两种一般的解决方案:

1. 使用sigma因子对截断的投影系数进行窗口化.这是信号处理中最常见的解决方案,可以与球谐[8][41][37]一起使用.
2. 最小化某种形式的变函数(例如最小化曲率),而不仅仅是标准的最小二乘误差.这通常在计算机辅助几何设计中完成,但也可以使用球谐函数有效地完成[38].

窗口化

最小化振铃伪像的一种方法是在频域中(在空间域中是卷积)乘以一个内核,该内核的投影系数在您接近截止频率时会逐渐减小为零.如果此函数是一个正弦信号,它被扩展以使其在截短的频带处达到零,则使用Lanczos sigma因数进行调用.凭直觉,此操作(在1D模式下)正在使用紧密框函数在空间域中进行卷积,从而使函数足够平滑,可以在不产生过多振铃的情况下表示出来.有更复杂的方法可以攻击吉布斯现象[10][4],但是它们使用SH系数来生成分段分析函数,这对于游戏来说并不方便.

根据我们的经验,开窗功能的选择不如具有在振铃和模糊之间权衡的灵活性重要.左图显示了两个开窗函数(红色是正弦,蓝色是升余弦波–称为汉宁窗),缩放比例为6阶SH（因此它们在7阶带中达到零，最后使用的值将在 5，并且仅对整数求值。）Hanning函数的衰变速度比Lancosz函数的衰变快，这使其模糊度更高。

上面我们显示了使用Lanczos和Hanning sigma因子的结果.投影的信号是6阶增量函数，是可以投影到SH中的“最尖峰”信号,并显示出振铃失真.增量函数的投影为ZH，因此我们显示的是球体的横截面,phi是固定的.绘制径向幅度,波瓣的符号交替.

一起查看所有图形（红色是delta函数的原始投影），您可以看到开窗如何消除消除环的同时使信号模糊（在图中的原点附近可见）。

最小化函数

另一种方法是尝试除平方近似误差外,使某些函数最小化.一种方法是满足一组约束(例如,在少量点处进行精确重构),然后使用剩下的“松弛”变量(假设有足够的自由度)来最小化某些误差函数[38].考虑到游戏/图形中经常使用的低阶SH,这种方法似乎不太实用,因此我不会再花时间在上面.一种替代方法是尝试最小化惩罚较大振荡的规范.这可以通过球谐函数以简单的方式完成.拉普拉斯算子或拉普拉斯算子是标量函数的梯度的散度;等效地.它是未混合的偏导数之和

在单位球面上的球坐标中,这是

拉普拉斯平方的积分是在球体上使用的曲率量度[38].我们将要最小化的函数是:

我们将稍作调整,因为我们已经知道原始投影系数,因此我们希望找到尽可能接近最小二乘结果的新系数,同时还要使加权平方拉普拉斯算子最小.这可以以封闭形式完成(请参阅附录A6最小二乘投影),给定𝜆会得出以下系数.

请注意,这相当于依赖开窗函数.当𝜆为零时,得到最小二乘系数;当𝜆𝜆为无穷时,仅得到DC项,其曲率为零.选择𝜆的一种方法是解决将平方的Lalpacian减少固定量(例如一半)的问题.这可以使用任何标准的根查找技术来完成.有关如何使用牛顿方法执行此操作的说明,请参见[附录A7解决兰巴以减少平方拉普拉斯算子].下面是使用6阶三角函数求解的结果,该平方拉普拉斯算子是原始值的10％（𝜆 = .004209绿色）和50％（𝜆= .000632蓝色）.最后的图将它们与delta函数本身一起显示：

内容敏感窗口化

照明可以全局设置为窗口，但也可以根据环对最终阴影图像的影响来设置窗口。 下面举例说明。 我们正在使用明亮的定向光源（高光饱和）来渲染有点磨砂（但不是漫反射-功率为10的phong）。如果未应用开窗，则原理高光会更清晰，但环上的伪影却很清晰。 如果照明是开窗的，则环会消失，但主要亮点也将模糊。 相反，您可以查看反射矢量和主光方向之间的角度，如果该角度很小，则不需要开窗，因为它会增加，您可以在开窗光源和非开窗光源之间进行混合，从而保留了鲜明的高光，同时消除了 敲响的文物。 该图像序列如下所示：

用于控制混合的公式为：

其中是未开窗光源的权重(窗口为),是确定何时完全使用开窗光源的阈值,是控制混合的过渡区域的阈值.在该图中,为0.07,为0.8.您可以使用这些参数进行试验,阈值将主要基于开窗量和材料属性.如果光源不是定向光源,则可以计算定向光源对光源的近似程度,并在确定要混合的量时将其考虑在内（最简单的方法是计算光源之间的张量积.照明环境由定向光近似,法线/反射向量与主导光向量有多近.）对于更复杂的阴影，例如PRT，可以使用主导传递方向，以及它与传递函数的近似程度可能是张量积的另一个因素（因此，当其中的任何一项都不很恰当时，您就可以开窗。）如果光照非常动态，则需要注意当光照变化时可能发生的时间假象（例如：阴影/反射会变得更锐利，等等。）对于诸如静态SH光探头之类的技术，该技术应该可以很好地工作。